

Расчет биомеханических элементов с памятью формы

Зарубин З.В., асп.

Рассматриваются вопросы моделирования и оптимизации биомеханических имплантатов с эффектом памяти формы в случае сложного термомеханического нагружения.

Ключевые слова: имплантат, память формы, фиксаторы, деформация.

Calculation of biomechanical units with capability of form memorization

Zarubin Z.V., Graduate student

The problems of simulation and optimization of biomechanical implants with capability of form memorization are considered in case of composite thermo-mechanical loading.

Keywords: implant, memory of the form, fixatives, deformation.

В силу высокой коррозионной стойкости и биологической инертности сплавы с эффектом памяти формы (ЭПФ) применяются в качестве материалов для изготовления совместимых с человеческим организмом биомеханических имплантатов. В частности, из ЭПФ-сплавов изготавливаются различные виды фиксаторов для спондилодеза и протезирования костных и связочно-хрящевых структур позвоночника (рис. 1) [1]. При рентгеноэндоскопической (внутрисосудистой) хирургии используются сеточные или спиральные имплантаты, укрепляющие стенки сосудов (рис. 2) [2, 3].

Механическое поведение имплантатов должно быть подобно поведению тканей, которые заменяются или укрепляются. Поведение имплантатов, используемых при остеосинтезе или для укрепления костных трансплантатов, должно быть подобно механическому поведению кости. Имплантаты, замещающие межпозвоночные диски или связочные структуры, должны обладать механическими свойствами, максимально близкими к свойствам хрящей или связок.

Перед внедрением в организм человека имплантат с ЭПФ охлаждают до температуры мартенситной фазы T_1 , затем деформируют на величину $\Delta_{\text{деф}}$, придавая оптимальную для внедрения форму. Эта величина не должна превышать определенного предела, для обеспечения полного восстановления формы при нагреве. После внедрения имплантат под действием температуры человеческого тела принимает исходный размер, отличающийся от размера фиксируемого или укрепляемого объекта на величину $\Delta_{\text{уст}}$. В результате создается фиксирующая сила F , значение которой лежит в пределах $F_{1\text{min}} < F < F_{1\text{max}}$. В процессе эксплуатации перемещение имплантата может колебаться в пределах $\pm \Delta_{\text{экспл}}$, а фиксирующая сила – в пределах от $F_{2\text{min}} < F_{1\text{min}}$ до $F_{2\text{max}} > F_{1\text{max}}$. При этом жесткость имплантата рассчитывается следующим образом: $K = (F_{2\text{max}} - F_{2\text{min}}) / 2\Delta_{\text{экспл}}$, т.е. каждый имплантат из ЭПФ-сплава обладает рядом технологических параметров и функциональных характеристик [1]. В большинстве случаев анализ

напряженно-деформированного состояния имплантатов не проводится и рассмотренные характеристики подбираются из эмпирических соображений.

Для обеспечения требуемого уровня этих характеристик и возможности их оптимизации необходима математическая модель, позволяющая при помощи метода конечных элементов моделировать трехмерное напряженно-деформированное состояние стержневой конструкции в случае сложного термомеханического нагружения.

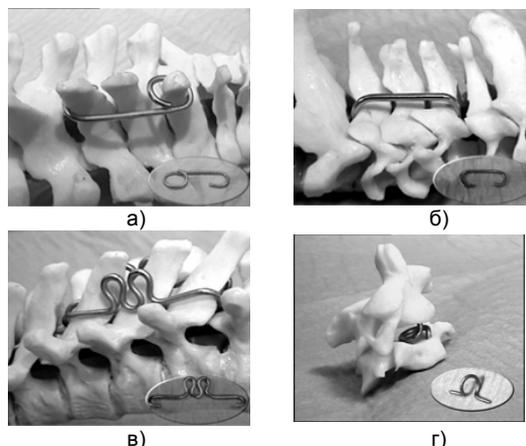


Рис. 1. Фиксаторы для спондилодеза и протезирования позвоночника: а – межпозвоночный фиксатор; б – беспетельный фиксатор; в – петельный фиксатор; г – эндопротез межпозвоночного диска

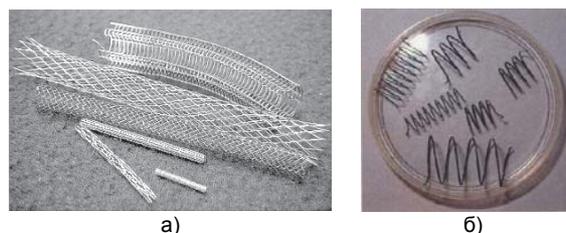


Рис. 2. Имплантаты для укрепления стенок сосудов: а – сеточный имплантат [2]; б – спиральный имплантат [3]

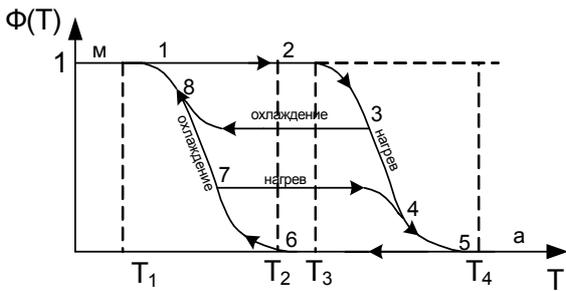


Рис. 3. Зависимость относительного количества мартенсита (Φ) от температуры

Ранее [4] сплав с ЭПФ моделировался как двухфазный материал, в котором соотношение мартенситной и аустенитной фаз задается при помощи коэффициента Φ (рис. 3). Через коэффициент Φ выражается зависимость модуля упругости E, предела текучести σ_T и других характеристик сплава с ЭПФ от температуры.

Основываясь на результатах работы [4], рассмотрим квазистатическую задачу о пространственном изгибе стержня под воздействием сложной термомеханической нагрузки. Для расчета пространственной стержневой системы воспользуемся методом переменных параметров упругости. Метод переменных параметров упругости основан на перестроении матрицы жесткости системы на каждом шаге итерации. При этом многократно решается упругая задача, но параметры упругости в каждом элементе на каждой итерации различны. Таким образом, физические уравнения теории пластичности можно заменить уравнениями теории упругости. Положение стержневого элемента характеризуется 12 независимыми перемещениями (по 6 степеней свободы в каждом узле). Связь между узловыми перемещениями элемента в локальной и глобальной системах координат имеет вид

$$\{\Delta\} = [L]\{\bar{\Delta}\},$$

где [L] – матрица направляющих косинусов.

Поскольку каждому узловому перемещению соответствует своя узловая сила, то такая же связь будет между узловыми силами [P] и [P̄] в локальных и глобальных осях координат:

$$\{P\} = [L] \cdot \{P̄\}, \quad \{P̄\} = [K̄] \cdot \{\bar{\Delta}\}.$$

Связь между глобальной и локальной системой координат осуществляется через углы Эйлера. Пусть имеется конструкция, которая состоит из k балочных элементов, соединенных между собой m узлами, имеет v ограничений на узловые перемещения; при этом расчет необходимо провести для n вариантов нагружения конструкции. Соответственно, имеются следующие массивы:

- $\lambda = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{Bmatrix}$ – столбец весовых коэффициентов;
- $Mk = \begin{Bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & x_m \end{Bmatrix}$ – матрица координат узлов (x_j, y_j) ;
- $Ms = \begin{Bmatrix} an_1 & ak_2 \\ \vdots & \vdots \\ an_k & ak_k \end{Bmatrix}$ – матрица связи $((an_i, ak_i)$ – номера узлов для i-го элемента);
- $Pg = \begin{Bmatrix} Pg_1 \\ \vdots \\ Pg_{6m} \end{Bmatrix}$ – столбец ограничения степеней свобод (1 узел имеет 6 степеней свободы);
- $Pn = \begin{bmatrix} Pn_{1,1} & \dots & Pn_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Pn_{6m,1} & \dots & Pn_{6m,n} \end{bmatrix}$ – матрица нагружения (возможны 6 видов нагружения на 1 узел);
- $L = \begin{Bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \end{Bmatrix}$ – столбец длин элементов;
- $\alpha = \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_k & \beta_k & \gamma_k \end{Bmatrix}$ – матрица Эйлеровых углов.

Матрица жесткости для i-го элемента определена как

$$[k_i] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{L^3} & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EJ_y}{L^3} & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & \frac{4EJ_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EJ_y}{L^2} & \frac{2EJ_y}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_z}{L^3} & \frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EJ_z}{L^3} & \frac{6EJ_z}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{L^2} & \frac{4EJ_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EJ_z}{L^2} & \frac{2EJ_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-12EJ_y}{L^3} & \frac{-6EJ_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{L^3} & \frac{-6EJ_y}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & \frac{2EJ_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EJ_y}{L^2} & \frac{4EJ_y}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EJ_z}{L^3} & \frac{-6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_z}{L^3} & \frac{-6EJ_z}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{L^2} & \frac{2EJ_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EJ_z}{L^2} & \frac{4EJ_z}{L} \end{bmatrix}$$

Сформируем матрицы жесткости элементов системы в глобальных координатах:

$$[\bar{k}_i] = [L_i]^T [k_i] [L_i].$$

Сформируем матрицу индексов:

$$[M] = \begin{bmatrix} (Ms_{11}-1)6+1 & (Ms_{11}-1)6+6 & (Ms_{12}-1)6+1 & (Ms_{12}-1)6+6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (Ms_{s1}-1)6+1 & (Ms_{s1}-1)6+3 & (Ms_{s2}-1)6+1 & (Ms_{s2}-1)6+6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (Ms_{k1}-1)6+1 & (Ms_{k1}-1)6+6 & (Ms_{k2}-1)6+1 & (Ms_{k2}-1)6+6 \end{bmatrix}$$

Матрица индексов имеет размер $k \times 12$ и максимальный член $m-6$. Таким образом,

система обладает $m-6$ степенями свободы. Матрица жесткости системы имеет ранг $m-6$ и может быть образована перебором по строкам и столбцам. Пусть первоначально $\bar{K}_{j,j1} = 0$, где $j = 1, 2, \dots, m-6; j1 = 1, 2, \dots, m-6$.

Тогда

$$[\bar{K}]_{(M_{i,j}, M_{i,j1})} = [\bar{K}]_{(M_{i,j}, M_{i,j1})} + [k_i]_{j,j1},$$

где $i = 1, 2, \dots, k$ – номера элементов.

Вычеркивая строки и столбцы, соответствующие ограничениям степеней свободы системы, получим конденсированную матрицу жесткости $[\bar{K}']$ рангом $(m-6-v)$. Получим матрицу податливости системы: $[\bar{f}'] = [\bar{K}']^{-1}$.

Вставляя нулевые строки и столбцы, соответствующие ограничениям степеней свободы, получим развернутую матрицу податливости системы $[f']$.

Определим виртуальные перемещения всей системы для каждого варианта нагружения:

$$[\bar{\Delta}]^{(t)} = [f'] \cdot [Pn]^{(t)}.$$

Определим перемещения элементов в глобальных осях:

$$[\bar{\Delta}e_{i,t}]_{j,i} = [\bar{\Delta}]_{M_{i,j,t}},$$

где $j = 1, 2, \dots, 12; i = 1, 2, \dots, k; t = 1, 2, \dots, n$.

Таким образом получили $k \cdot n$ столбцов размера 12×1 перемещений элементов в глобальных осях системы.

Выразим перемещения элементов в локальных осях:

$$[\Delta e_{i,t}] = [L_i][\bar{\Delta}e_{i,t}].$$

Выразим узловые нагрузки в локальных осях:

$$[P_{i,t}] = [k_i][\Delta e_{i,t}].$$

Определим массив максимальных напряжений в элементах для первого шага итерации:

$$\sigma_{i,t} = \max \left(\left| \frac{[P_{i,t}]_3}{W} \right| + \left| \frac{[P_{i,t}]_1}{A} \right|, \left| \frac{[P_{i,t}]_6}{W} \right| + \left| \frac{[P_{i,t}]_4}{A} \right| \right),$$

где W и A – осевой момент сопротивления и площадь поперечного сечения соответственно.

Исходя из разработанной ранее модели материала, определим эффективные модули упругости для каждого элемента и варианта нагружения:

$$E_{\Delta i,t} = \begin{cases} E^{(t)} & \text{при } \sigma_{i,t} \leq \sigma_T^{(t)} \\ \frac{\sigma_{i,t}}{E^{(t)} + \frac{\sigma_{i,t} - \sigma_T^{(t)}}{E_T^{(t)}}} & \text{иначе} \end{cases}$$

где $\{E^{(t)}, \sigma_T^{(t)}, E_T^{(t)}\}$ – параметры разработанной ранее модели материала.

Повторно определяем матрицу жесткости элементов для каждого варианта нагружения:

$$[k_e]^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{E_i A}{L_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_i A}{L_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12E_i J_y}{L_i^3} & \frac{6E_i J_y}{L_i^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12E_i J_y}{L_i^3} & \frac{6E_i J_y}{L_i^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E_i J_y}{L_i^2} & \frac{4E_i J_y}{L_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-6E_i J_y}{L_i^2} & \frac{2E_i J_y}{L_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12E_i J_z}{L_i^3} & \frac{6E_i J_z}{L_i^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12E_i J_z}{L_i^3} & \frac{6E_i J_z}{L_i^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_i J_z}{L_i^2} & \frac{4E_i J_z}{L_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-6E_i J_z}{L_i^2} & \frac{2E_i J_z}{L_i} \\ -\frac{E_i A}{L_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_i A}{L_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-12E_i J_y}{L_i^3} & \frac{-6E_i J_y}{L_i^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12E_i J_y}{L_i^3} & \frac{-6E_i J_y}{L_i^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E_i J_y}{L_i^2} & \frac{2E_i J_y}{L_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-6E_i J_y}{L_i^2} & \frac{4E_i J_y}{L_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12E_i J_z}{L_i^3} & \frac{-6E_i J_z}{L_i^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12E_i J_z}{L_i^3} & \frac{-6E_i J_z}{L_i^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_i J_z}{L_i^2} & \frac{2E_i J_z}{L_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-6E_i J_z}{L_i^2} & \frac{4E_i J_z}{L_i} \end{bmatrix}$$

Формируем матрицы жесткости системы для каждого значения массива нагружения:

$$[\bar{K}]_{(M_{i,j}, M_{i,j1})}^{(t)} = [\bar{K}]_{(M_{i,j}, M_{i,j1})} + [k^{(i)}]_{j,j1},$$

где $i = 1, 2, \dots, k$ – номера элементов.

Повторно проводим решение системы как упругой. В конечном итоге получаем:

$[\Delta e_{2,i,t}]$ – перемещения элементов в локальных осях, вызванные внешней нагрузкой;

$[P_{2,i,t}]$ – узловые нагрузки в локальных осях;

$\sigma_{2,i,t}$ – максимальные напряжения в элементах для второго шага итерации.

Согласно разработанной ранее модели [4], определяем максимальные напряжения за цикл нагружения:

$$\sigma_{M_{i,t}} = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma_{M_{i,t-1}} < \sigma_{m_t}, \\ \sigma_{2,i,t} & \text{при } \sigma_{2,i,t} > \sigma_{m_t}, \\ \sigma_{M_{i,t-1}} & \text{при } \sigma_{M_{i,t-1}} > \sigma_{m_t} \text{ и } \sigma_{M_{i,t-1}} > \sigma_{2,i,t}. \end{cases}$$

Определим столбец коэффициентов остаточной деформации:

$$k_{2,i,t} = \begin{cases} (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T & \text{при } \sigma_{M_{i,t}} = 0, \\ \left(\begin{array}{l} 0 \text{ при } \sigma_{2,i,t} < \sigma_{m_t} \text{ и } \Delta e_{2,i,t-1} \neq (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \\ 1 - \frac{\sigma_{2,i,t}}{E^{(t)}} \\ \frac{\sigma_{m_t}}{E^{(t)}} + \frac{\sigma_{2,i,t}}{E_T^{(t)}} \\ \frac{\sigma_{m_t}}{E^{(t)}} + \frac{\sigma_{2,i,t} - \sigma_{m_t}}{E_T^{(t)}} - \frac{\sigma_{2,i,t}}{E^{(t)}} \end{array} \right) & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом остаточная деформация составит

$$\Delta \sigma_{M_{i,t}} = k_{2,i,t} \left(\frac{\sigma_{m_t}}{E_{1t}} + \frac{\sigma_{M_{i,t}} - \sigma_{m_t}}{E_{2t}} - \frac{\sigma_{M_{i,t}}}{E_{1t}} \right),$$

а деформация, вызванная внешней нагрузкой, будет равна

$$\Delta \sigma_{H_{i,t}} = \begin{cases} \Delta e_{2_{i,t}} & \text{при } \sigma_{2_{i,t}} < \sigma_{m_t}, \\ \Delta e_{2_{i,t}} \frac{\frac{\sigma_{2_{i,t}}}{E^{(t)}}}{\frac{\sigma_{m_t}}{E^{(t)}} + \frac{\sigma_{2_{i,t}}}{E_T^{(t)}}}. & \end{cases}$$

Определим полную деформацию для каждого элемента и всех вариантов нагружения в локальных координатах:

$$\Delta \text{пол}_{i,t} = \Delta \sigma_{H_{i,t}} + \Delta \sigma_{m_{i,t}}.$$

При этом деформация в глобальных координатах для каждого элемента будет равна

$$\bar{\Delta} \text{пол}_{i,t} = [L_i]^{-1} \Delta \text{пол}_{i,t}.$$

Таким образом, определено поле деформации конструкции и всех значений массива на-

гружения. Поле деформации является вводным массивом для дальнейшего расчета напряжений, узловых сил и моментов.

Список литературы

1. Ильин А.А., Коллеров М.Ю., Давыдов Е.А. Биологически и механически совместимые имплантаты из никелида титана для лечения позвоночно-спинальных травм и дегенеративно-дистрофических заболеваний // www.implants.ru/txn-inf/2-st.shtml
2. Machado L.G., Savi M.A. Medical applications of shape memory alloys // Brazilian Journal of Medical and Biological Research. – 2003. – № 36. – P. 683–691.
3. Развитие научно-технических решений в медицине / В.Н. Канюков, Н.Г. Терегулов, В.Ф. Винярский, В.В. Осипов: Учеб. пособие. – Оренбург: ОГУ, 2000.
4. Ноздрин М.А., Зарубин З.В. Напряженное состояние изделий из сплавов с эффектом памяти формы // Вестник ИГЭУ. – 2008. – Вып 3. – С. 59–61.

Зарубин Захар Викторович,
Ивановский государственный энергетический университет,
аспирант кафедры теоретической и прикладной механики,
e-mail: tipm@tipm.ispu.ru